SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

INTRODUZIONE ALLE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

20-27 MAGGIO 1982

1. INTRODUZIONE

L'inclusione differenziale

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x} \in \Gamma(t,x)$$

è stata studiata per multifunzioni

$$R \times X \xrightarrow{\Gamma} X$$

a valori in spazi X localmente convessi assai generali. Tuttavia qui intendiamo considerare principalmente il caso $X = R^n$ per avere una esposizione più semplice e anche perché si hanno i risultati più completi. Caso per caso verranno date indicazioni sulle eventuali estensioni a spazi X più generali.

Equazioni di tipo (1) si presentano nello studio di fenomeni evolutivi in cui la velocità non è univocamente determinata dallo stato (per esempi provenienti da problemi di economia cfr. Aubin [1]).

Un'altra classe notevole di equazioni di tipo (1) si incontra nella teoria del controllo per le equazioni differenziali ordinarie: $\dot{x} = f(t,x,u)$, $u \in U$. A questo proposito osserviamo che vale il seguente

Teorema. Sia $R^n \supset \Omega$ aperto, (U,ρ) = spazio metrico compatto,

$$[a,b] \times \Omega \times U \ni (t,x,u) \xrightarrow{f} f(t,x,u) \in R^n$$

$$[a,b] \ni t \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(t) \neq \emptyset \text{ compatto} \subset U$$

con f t-misurabile e (x,u)-continua. Se Γ è misurabile (cfr. n. 3. Si può prendere $\Gamma(t) = U$), sono equivalenti le seguenti affermazioni su

$x : [a,b] \to \Omega$ assolutamente continua

a) esiste $u : [a,b] \to U$ misurabile tale che $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $u(t) \in \Gamma(t)$ q.d.

b) $\dot{x}(t) \in f(t,x(t),\Gamma(t))$ q.d.

Questo risultato è dovuto a Filippov [2].

Equazioni di tipo (1) possono nascere anche come "equazioni di Hamilton generalizzate" per certi problemi di calcolo delle variazioni (cfr. Rockafellar [3]).

Anche le disequazioni differenziali del tipo $|\dot{x}-g(t,x)| \leqslant f(t,x)$ si possono rappresentare nella forma (1) ponendo $\Gamma(t,x)$ = sfera di centro $g(t,x)$ e raggio $f(t,x)$, e le equazioni differenziali implicite $f(t,x,\dot{x}) = 0$, ponendo $\Gamma(t,x) = \{v | f(t,x,v) = 0\}$.

Le soluzioni qui considerate saranno in ogni caso assolutamente continue. In tal modo, già nel caso $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$, siamo condotti al problema della esistenza di *selezioni misurabili* per Γ. D'altra parte ha interesse anche la ricerca di *selezioni continue* per Γ, perché se $\gamma(x) \in \Gamma(x) \subset R^n$ e γ è continua in Ω aperto, allora le soluzioni di $\dot{x} = \gamma(x)$ sono soluzioni di $\dot{x} \in \Gamma(x)$. Qui di seguito riporteremo alcuni risultati di esistenza di selezioni continue o misurabili, dopo avere introdotto le nozioni di (semi-)continuità e misurabilità per multifunzioni.

Prima però introduciamo alcuni simboli relativi all'equazione (1):

$$T_\Gamma([a,b];\xi) = \{x \in C([a,b],X) | x \text{ assolutamente continua e q.d. derivabile, } x(a) = \xi,\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t,x(t)) \text{ q.d.}\}$$

$$A_\Gamma([a,b];\xi) = \{x(b) | x \in T_\Gamma([a,b];\xi)\} \subset X$$

$$F_\Gamma([a,b];\xi) = \{(t,x(t)) | x \in T_\Gamma([a,b];\xi),\ a \leqslant t \leqslant b\} \subset R \times X$$

Ricordiamo che può essere $x : [a,b] \to X$ = spazio di Banach as-

solutamente continua, ma non derivabile in alcun punto.

Per esempio si può prendere

$$X = C([-1,1], R), \quad x(t)(\theta) = |t+\theta| \text{ con } |t|, |\theta| \leqslant 1$$

In questo caso x è lipschitziana.

Avremo occasione di considerare anche soluzioni, che diremo *regolari* seguendo Tolsonogov [4], tali che $\dot{x}$ abbia al più discontinuità di prima specie (su ogni intervallo compatto sono limiti uniformi di successioni di funzioni a gradino - cfr. Dieudonné [5]).

2. MULTIFUNZIONI SEMICONTINUE

Il concetto di continuità per funzioni ordinarie si estende alle multifunzioni fra spazi topologici

$$X \xrightarrow{\ \Gamma\ } Y \quad \text{a valori} \neq \emptyset$$

nei seguenti modi:

I) Γ si dice *semicontinua superiormente* (u.s.c.) se verifica le condizioni equivalenti:

a) Γ^{-1} (chiuso) = chiuso

b) $\{x|\Gamma(x) \subset \text{aperto}\}$ = aperto

c) $\Gamma(x) \subset \Omega$ aperto $\Rightarrow$ $\exists$ aperto $0 \ni x$ tale che

$$\Gamma(x') \subset \Omega, \qquad \forall x' \in 0$$

Si è posto $\Gamma^{-1}(E) = \{x|\Gamma(x) \cap E \neq \emptyset\}$.

II) Γ si dice *semicontinua inferiormente* (l.s.c.) se verifica le condi-

zioni equivalenti:

a) Γ^{-1} (aperto) = aperto

b) $\{x | \Gamma(x) \subset \text{chiuso}\}$ = chiuso

c) $\Gamma(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ con Ω aperto $\Rightarrow$ $\exists$ aperto $0 \ni x$ tale che

$$\Gamma(x') \cap \Omega \neq \emptyset , \qquad \forall x' \in 0$$

Consideriamo alcuni esempi.

Prendiamo la funzione ordinaria

$$X \xrightarrow{f} R$$

e poniamo

$$F_{\pm}(x) = f(x) \pm [0, +\infty[$$

Allora si ha

$$f \text{ l.s.c.} \Leftrightarrow F_{-} \text{ l.s.c.} \Leftrightarrow F_{+} \text{ u.s.c.}$$

La funzione

$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma_1} \begin{cases} \{1\} \text{ se } x < 0 \\ \{-1,1\} \text{ se } x = 0 \\ \{-1\} \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

è u.s.c., ma non l.s.c..

La funzione

$$[0,1] \ni x \xrightarrow{\Gamma_2} \begin{cases} [0,x] \text{ se } 0 \leqq x < 1 \\ \{1\} \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

è l.s.c., ma non u.s.c..

La funzione Γ si dirà *continua* se è sia u.s.c. che l.s.c..

Consideriamo la funzione continua

$$X \times U \xrightarrow{f} Y$$

dove U è uno spazio compatto. Allora la funzione

$$X \ni x \xrightarrow{\Gamma} \{f(x,u) | u \in U\} = f(x,U)$$

è continua. Osserviamo che la compattezza di U non serve per provare la l.s.c., ma non si può eliminare per la u.s.c., come prova l'esempio

$$[0,1] \times [0,1[\ni (x,u) \xrightarrow{f} (x,u) \in R^2$$

in cui $U = [0,1[$ e

$$f(0,U) \subset \{(x,u) | x+u < 1\} \not\supset f(x,U), \quad \forall x > 0$$

Alcune delle proprietà della continuità ordinaria si trasportano alle m-funzioni come indicato nel seguente

<u>Teorema</u>. Valgono le seguenti affermazioni per

$$X \xrightarrow{\Gamma} Y \text{ a valori } \neq \emptyset$$

i) Se Γ è u.s.c. oppure l.s.c. e $\Gamma(x)$ è connesso per ogni $x \in X$, allora Γ(connesso) = connesso.

ii) Se Γ è u.s.c. e $\Gamma(x)$ è compatto per ogni $x \in X$, allora Γ(compatto) = = compatto (la funzione Γ_2 considerata sopra mostra che ciò è falso

per Γ l.s.c.).

iii) (*Grafico chiuso*). Se Γ è u.s.c., $\Gamma(x)$ è chiuso per ogni $x \in X$ e Y è uno spazio T_3(regolare), allora Γ è chiuso in $X \times Y$ (la funzione Γ_2 precedente mostra che ciò è falso per Γ l.s.c.). Se Γ è chiuso in $X \times Y$ e Y è compatto, allora Γ è u.s.c..

iv) Componendo funzioni u.s.c. (l.s.c.) si ottengono funzioni dello stesso tipo:

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(\Gamma_2(x)) = \bigcup_{y \in \Gamma_2(x)} \Gamma_1(y)$$

Per la dimostrazione delle affermazioni precedenti si veda Aubin-Cellina [6] oppure Smythson [7].

Di particolare interesse per le inclusioni differenziali è il caso (Y,ρ) = spazio metrico e Γ a valori compatti $\neq \emptyset$. Ora sullo spazio

$$\text{comp}(Y) = \{A \subset Y \mid \emptyset \neq A \text{ compatto}\}$$

si può introdurre la *distanza di Hausdorff*

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon,\ B \subset A_\varepsilon\}$$

essendo $A_\varepsilon = \{y \in Y \mid \rho(y,A) = \inf_{z \in A} \rho(y,z) \leq \varepsilon\}$.

Le seguenti proprietà dello spazio metrico (Y,ρ) si trasportano allo spazio metrico $(\text{comp}(Y),h)$:

- compattezza
- totale limitatezza (precompattezza)
- completezza
- separabilità
- connessione.

Inoltre la *topologia* generata dalla distanza di Hausdorff ha una *base* costituita dagli insiemi

$\{A \subset Y | \emptyset \neq A \subset \Omega_o, A \cap \Omega_i \neq \emptyset$ per $1 \leq i \leq n\}$, Ω_i aperto in Y.

La multifunzione $\Gamma : X \multimap Y$, a valori $\neq \emptyset$ compatti, si può pensare come funzione ordinaria

$$X \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(Y)$$

e la sua *continuità rispetto alla distanza di Hausdorff* coincide con la continuità precedentemente definita.

Per la dimostrazione di queste affermazioni cfr. Bourbaki [8], Castaing-Valadier [9].

Supponiamo ora che Y sia uno *spazio localmente convesso* e T_2 (Hausdorff) e Γ a valori convessi ed enunciamo alcuni risultati utili nella trattazione delle inclusioni differenziali:

i) (*Punto unito*). Se $Y \supset C \neq \emptyset$ compatto e convesso e $\Gamma : C \multimap C$ è u.s.c. a valori $\neq \emptyset$ convessi e chiusi, allora esiste $x \in C$ tale che $x \in \Gamma(x)$. (cfr. Smithson [7]).
Osserviamo che se Y è anche metrizzabile si può sostituire l'ipotesi di convessità di $\Gamma(y)$ con l'ipotesi di "aciclicità" (cfr. Lasry-Robert [10]).

ii) (*Selezioni continue*). Sia X uno spazio metrico, Y uno spazio di Banach, $\Gamma : X \multimap Y$ l.s.c. a valori $\neq \emptyset$ convessi e chiusi. Allora esiste $\gamma : X \to Y$ continua tale che

$$\gamma(x) \in \Gamma(x) , \qquad x \in X$$

Questo risultato è dovuto a Michael [11] (cfr. anche Aubin-Cellina [6]).
L'esempio

$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma_3} \begin{cases} \{-1\} & \text{per } x < 0 \\ [-1,1] & \text{per } x = 0 \\ \{1\} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

mostra che non si può sostituire la l.s.c. con la u.s.c..

Esiste $[0,1] \ni t \to \Gamma(t) \in \mathrm{comp}(R^2)$ continua, ma priva di selezioni continue (cfr. Hermes 17 , pag. 158 - Ex: 2.1).

iii) (*Approssimazione*). Sia X uno spazio metrico, Y uno spazio di Banach, $\Gamma : X \multimap Y$ u.s.c. a valori $\neq \emptyset$ compatti e convessi tale che $\Gamma(X) \subset K$ = compatto. Allora esiste una successione di m-funzioni

$$X \underset{\text{u.s.c.}}{\overset{\Gamma_n}{\multimap}} K \subset Y \text{ a valori } \neq \emptyset \text{ compatti e convessi, } n = 1,2,...$$

che verifica le condizioni

a) $\Gamma_n(x) \supset \Gamma_{n+1}(x) \supset \dots \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(x) = \Gamma(x)$

b) $\forall x \in X, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \nu \in N: \Gamma_n(x) \subset \Gamma(x) + \varepsilon B$ per $n \geq \nu$

c) ogni Γ_n è del tipo

$$X \ni x \to \sum_{j \in J} \psi_j(x) \, C_j$$

dove $J \ni j \to \psi_j$ è una partizione dell'unità in X localmente finita e localmente lipschitziana e $\emptyset \neq C_j$ = compatto convesso. Inoltre $B = \{y \in Y \mid \|y\| \leq 1\}$ (cfr. Haddad [12], Lasry-Robert [10]).

3. MULTIFUNZIONI MISURABILI

Se $(X,\mathcal{X})$ è uno spazio misurabile ($\mathcal{X}$ = σ-algebra di sottoinsiemi di X) e Y è uno spazio topologico, si dice che la m-funzione

$$X \xrightarrow{\Gamma} Y$$

è *misurabile* se Γ^{-1} (chiuso) = misurabile.

Qui ci proponiamo di esporre alcuni risultati relativi alle selezioni misurabili in condizioni particolarmente semplici. Per risultati più generali rimandiamo a Castaing-Valadier [9], Wagner [13] e [14].

i) (*Misurabilità*). Supposto Y = spazio metrico completo e separabile,

$$R \supset [a,b] \xrightarrow{\Gamma} Y \text{ a valori } \neq \emptyset \text{ compatti}$$

sono equivalenti le affermazioni

a) Γ^{-1} (aperto) = misurabile

b) Γ^{-1} (chiuso) = "

c) Γ^{-1} (compatto) = "

d) $\Gamma : [a,b] \to \text{comp}(Y)$ è misurabile (Γ^{-1} (aperto) = misurabile)

e) esiste una successione di funzioni misurabili $\sigma_n : [a,b] \to Y$ tali che

$$\sigma_n(t) \in \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_j(t) \mid j \in N\}}$$

f) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni insieme misurabile $A \subset [a,b]$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset A$ tale che $\text{mis}(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ e Γ è continua su K_ε

g) la funzione ordinaria

$$[a,b] \ni t \to \rho(y,\Gamma(t))$$

è misurabile per ogni $y \in Y$.

Se si suppone inoltre $\Gamma(t)$ = convesso $\subset$ Y = Frechet, è equivalente

alle precedenti anche

h) la funzione

$$[a,b] \ni t \to \sup_{y \in \Gamma(t)} \langle y,y' \rangle$$

è misurabile per ogni $y' \in Y^*$ = duale di Y.

In tutti gli enunciati precedenti si intende che la misura sul l'intervallo $[a,b]$ sia quella usuale di Lebesgue. Per la dimostrazione cfr. Castaing-Valadier [9] e anche Wagner [13], [14].

ii) (*Funzioni implicite*). Sia X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico separabile e completo,

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{\Gamma} \text{comp}(X)$$

$$[a,b] \times X \ni (t,x) \xrightarrow{h} h(t,x) \in Y$$

con h t-misurabile e x-continua

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{g} Y$$

Se riesce $g(t) \in h(t,\Gamma(t))$ per ogni t, allora esiste

$$[a,b] \xrightarrow[\text{mis}]{\gamma} X$$

tale che per ogni t

$$g(t) = h(t,\gamma(t)), \qquad \gamma(t) \in \Gamma(t).$$

Questo risultato è dovuto a Filippov [2] (cfr. anche Wagner [13]).

Nella teoria delle inclusioni differenziali ha interesse la ri

cerca di selezioni misurabili per funzioni del tipo $t \to \Gamma(t,u(t))$, con u funzione ordinaria, che "dipendono regolarmente dalla funzione u". Indichiamo un risultato di questo tipo:

iii) Sia X uno spazio di Banach separabile,

$$[a,b] \times (x_0 + rB) \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(X)$$

$$\Gamma(t,x) \subset \omega(t)B, \qquad 0 \leq \omega \in L^\infty$$

con Γ t-misurabile e x-continua e sia $K \neq \emptyset$ compatto e convesso contenuto in $C([a,b], x_0 + rB)$.
Allora esiste la funzione *continua* $g : K \to L^1([a,b], X)$ tale che per ogni $u \in K$

$$g(u)(t) \in \Gamma(t, u(t)) \qquad \text{q.d.}$$

Per questo ed altri analoghi risultati cfr. Tolstonogov [4], [15] e Antosiewicz-Cellina [36].

4. EQUAZIONE $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$

Consideriamo la m-funzione

$$[0,T] \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(R^n)$$

e poniamo per semplicità

$$\mathcal{T}_\Gamma(T) = \mathcal{T}_\Gamma([0,T];\ 0)$$

$$A_\Gamma(T) = A_\Gamma([0,T];\ 0).$$

Se Γ è una m-funzione qualsiasi, si dice *integrale di Aumann* [16] sull'insieme misurabile $E \subset R$ l'insieme

$$\int_E \Gamma(t)dt = \{ \int_E \gamma(t)dt | \gamma \in L^1(E,R^n),\ \gamma(t) \in \Gamma(t) \text{ q.d.}\}$$

Pertanto si ha

$$A_\Gamma(T) = \int_0^T \Gamma(t)dt$$

Per la nostra inclusione $\dot{x}(t) \in \Gamma(t)$ vale il seguente

Teorema 1. Sia data la m-funzione Γ verificante le condizioni

$$[0,T] \xrightarrow[\text{mis}]{\Gamma} \text{comp}(R^n)$$

$$\Gamma(t) \subseteq g(t)B, \qquad 0 \leq g \in L^1$$

Allora si ha

i) $A_\Gamma(T) = A_{\langle\Gamma\rangle}(T) \neq \emptyset$ convesso e compatto in R^n

ii) $\overline{T_\Gamma(T)} = T_{\langle\Gamma\rangle}(T) \neq \emptyset$ convesso e compatto in $C([0,T],R^n)$

iii) (*Bang-bang*) $A_\Gamma(T) = A_{\langle\Gamma\rangle^{\cdot\cdot}}(T)$

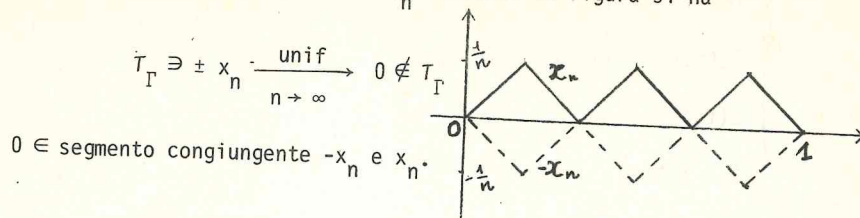
Si è posto $B = \{x \in R^n | \|x\| \leq 1\}$, $\langle \Gamma(t) \rangle$ = involucro convesso di $\Gamma(t)$, $\langle \Gamma(t) \rangle^{\cdot\cdot}$ = insieme dei punti estremi di $\langle \Gamma(t) \rangle$. Per la dimostrazione cfr. Hermes [17], Castaing-Valadier [9] Theorem IV. 17.

Osservazione 1. L'insieme $T_\Gamma(T)$ può essere non chiuso e non convesso, come mostra il semplice esempio

$$[0,1] \ni t \xrightarrow{\Gamma} \{-1,1\}$$

Per la successione di funzioni x_n indicate in figura si ha

$$T_\Gamma \ni \pm x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} 0 \notin T_\Gamma$$

$0 \in$ segmento congiungente $-x_n$ e x_n.

Osservazione 2. L'affermazione ii) continua a valere se si sostituisce R^n con uno spazio di Banach separabile (e $\langle\Gamma\rangle$ con $\langle\overline{\Gamma}\rangle$; cfr. Tolstonogov [18]). Per la generalizzazione ad altri tipi di spazi, nel caso di Γ a valori anche convessi, cfr. Castaing-Valadier [9].

5. EQUAZIONE $\dot{x} \in \Gamma(t,x)$

Nel seguito ci metteremo sempre in intervalli del tipo $[0,T] \subset R$ e per questo semplifichiamo così i simboli definiti nell'Introduzione:

$$T_\Gamma(T,\xi) = T_\Gamma([0,T];\ \xi),\ A_\Gamma(T,\xi) = A_\Gamma([0,T];\ \xi),\ldots$$

Ricordiamo che abbiamo posto $\mathrm{comp}(X) = \{A \subset X \mid \emptyset \neq A \text{ compatto}\}$. Poniamo anche

$$\mathrm{conv}(X) = \{A \subset X \mid \emptyset \neq A \text{ compatto e convesso}\}$$

Inoltre ricordiamo la definizione di "funzione di tipo Kamke": funzione ω tale che

$$\begin{cases} [0,T] \times [0,+\infty[\xrightarrow{\omega} [0,+\infty[\\ |\omega(t,x)| \leq g(t), \qquad 0 \leq g \in L^1 \\ \omega(t,o) \equiv 0 \\ 0 \leq x(t) \leq \int_0^t \omega(s,x(s))ds, \ x \text{ assol. cont.} \Rightarrow x(t) \equiv 0 \end{cases}$$

con ω t-misurabile e x-continua e crescente.
Un esempio è dato da $\omega(t,x) = g(t)x$.

Cominciamo con alcuni risultati per Γ a valori convessi. Successivamente passiamo a Γ a valori soltanto compatti e concluderemo con alcuni risultati sulle inclusioni $\dot{x} \in \Gamma(t,x)$ su insiemi non (necessariamente) aperti.

Teorema 2. Sia Γ una m-funzione tale che

$$[0,T] \times R^n \xrightarrow{\Gamma} \text{conv}(R^n)$$

ed esistano due funzioni γ e g per cui riesce

(H_1) $\qquad \gamma(t,x) \in \Gamma(t,x) \subset g(t)B, \qquad 0 \leq g \in L^1$

con γ t-misurabile e Γ x-u.s.c.. Allora valgono le affermazioni

i) $R^n \ni \xi \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} T_\Gamma(T,\xi) \neq \emptyset$ compatto, connesso

ii) $R^n \ni \xi \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} A_\Gamma(T,\xi),\ F_\Gamma(T,\xi) \neq \emptyset$ compatto, connesso

iii) Per ogni compatto $K \subset R^n$ ed $\eta \in \partial A_\Gamma(T,K)$ esiste $x \in T_\Gamma(T,K)$ tale che

$$x(t) \in \partial A_\Gamma(t,K) \text{ per } 0 \leq t \leq T,\ x(T) = \eta$$

Se si suppone $\Gamma(t,\cdot)$ *continua* e se vale (H_1), allora

iv) per ogni compatto $K \subset R^n$ e $x \in T_\Gamma(T,K)$ tale che

$$x(t) \in \partial A_\Gamma(t,K) \text{ per } 0 \leq t \leq T \quad \text{si ha}$$

$$\dot{x}(t) \in \partial\Gamma(t,x(t)) \qquad \text{q.d.}$$

Se vale (H_1) con g *limitata* e Γ *u.s.c.* rispetto alla coppia (t,x), allora

v) $T_\Gamma(T,\xi)$ è "aciclico"

Se vale (H_1) con Γ *continua* nella coppia (t,x), allora

vi) $T_\Gamma(T,\xi) \cap C^1([0,T], R^n) \neq \emptyset$.

Per le dimostrazioni di i)-iv) cfr. Davy [19], per v) cfr. Lasry-Robert [10] e Haddad [12], per vi) cfr. Filippov [20]. Come al solito, B indica la sfera unità chiusa e ∂A indica la frontiera di A.

Osservazione 1. In Aubin-Cellina [6] sono provate le affermazioni i) e ii) con R^n sostituito da uno *spazio di Hilbert* e nell'ipotesi che in (H_1) sia B = compatto (non più sfera-unità) e Γ u.s.c..

Osservazione 2. Fra i risultati di Tolstonogov [4], [15], [18], [21] sono contenute le affermazioni i) e ii) con R^n sotituito da uno spazio di *Banach separabile* se in (H_1) si suppone $\Gamma(\cdot,x)$ misurabile, $\Gamma(t,\cdot)$ continua e inoltre

$$h(\Gamma(t,x), \Gamma(t,y) \leq \omega(t, \|x-y\|),$$

dove ω è una funzione di tipo Kamke.

Osservazione 3. Castaing-Valadier [9] e Tolstonogov [22] hanno provato affermazioni di tipo i) e ii) per il caso in cui R^n è sostituito da uno spazio di *Banach separabile* munito della sua propria *topologia debole* (e anche da spazi di Suslin) in ipotesi del tipo

$$\Gamma(t,x) \subset g(t)K, \quad 0 \leq g \in L^1$$

con Γ t-misurabile e x-u.s.c. e con K convesso e debolmente compatto.

Osservazione 4. La u.s.c. da sola non è sufficiente per avere $T_\Gamma \neq \emptyset$, come mostra l'esempio

$$R \ni x \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x > 0 \\ \{-1,1\} & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il problema $x(0) = 0$, $\dot{x}(t) \in \Gamma(u(t))$ non ha soluzione.

Osservazione 5. Anche l'affermazione iv) può non valere senza la continuità di $\Gamma(t,\cdot)$, come si vede nell'esempio (cfr. Davy [19])

$$[0,1] \times R \ni (t,x) \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} [0,2] & \text{se } x = t \\ \{0\} & \text{se } x \neq t \end{cases}$$

Le uniche soluzioni x del problema

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t))$$

che verificano la condizione $x(t) \in \partial A_\Gamma(t,0)$ sono

$$x_0 : t \to 0 , \qquad x_1 : t \to t$$

ed è $\dot{x}_1(t) = 1 \notin \partial[0,2] = \partial\Gamma(t, x_1(t))$.

Osservazione 5. La misurabilità (e quindi la u.s.c.) di $\Gamma(\cdot,x)$ assicura l'esistenza di γ come in (H_1).

Teorema 2'. Se Γ verifica le condizioni

$$[0,T] \times R^n \times R^m \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{conv}(R^n)$$

(H'_1) $\qquad \gamma(t,x,u) \in \Gamma(t,x,u) \subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$

con γ t-misurabile e Γ (x,u)-u.s.c., allora si ha

i) $\qquad R^n \times R^m \ni (\xi,u) \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} \mathcal{T}_\Gamma(T;\xi,u) \neq \emptyset$ compatto connesso.

Per la dimostrazione cfr. Davy [19]. Nel Teorema 4 vedremo come si possa mettere al posto di R^n uno spazio di Banach.

Per il caso non convesso si ha il seguente

Teorema 3. Consideriamo la m-funzione

$$[0,T] \times R^n \supset \Omega \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{comp}(R^n)$$

con Ω aperto. Ciascuna delle seguenti condizioni è sufficiente a garantire

$$\mathcal{T}_\Gamma(T,\xi) \neq \emptyset$$

se $(0,\xi) \in \Omega$ e $T > 0$ è sufficientemente piccolo.

i) Γ è l.s.c., e in questo caso esistono soluzioni "regolari";

ii) Γ verifica la condizione

$$\Gamma(t,x) \subset g(t)B, \quad 0 \leq g \in L^1$$

e Γ è t-misurabile e x-continua.

Per la dimostrazione cfr. Lojasieviez jr. [23] per i) e Kaczynski-Olech [24] per ii).

L'esempio dell'Osservazione 4 al Teorema 2 mostra che i) può cessare di valere per Γ u.s.c. invece che l.s.c..

Osservazione 1. In ii) è sufficiente la u.s.c. di $\Gamma(t,\cdot)$ in ogni punto x_0 tale che $\Gamma(t,x_0)$ = convesso per ogni t (cfr. Olech [25]).

Osservazione 2. La continuità di Γ, rispetto alla coppia (t,x), non è sufficiente per la u.s.c. di T_Γ, come ha mostrato Pianigiani [26].

La continuità non è sufficiente neanche per avere $\overline{T}_\Gamma = T_{\langle\Gamma\rangle}$ (cfr. Teorema 1), come mostra l'esempio (dovuto a Plis, cfr. Hermes [17])

$$R^2 \ni x = (x_1,x_2) \xrightarrow{\Gamma} \{(v_1,v_2) \in R^2 | v_1 = \pm 1;\ v_2 = x_1^2 + \sqrt{|x_2|}\}$$

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t,x(t)),\ x(o) = 0$$

Il Teorema seguente fornisce condizioni sufficienti per avere $\overline{T}_\Gamma = T_{\langle\Gamma\rangle}$.

Teorema 4. Sia X uno spazio di Banach separabile, U uno spazio metrico compatto. Supponiamo che Γ verifichi le condizioni

$$[0,T] \times X \times U \xrightarrow{\Gamma} \text{comp}(X)$$

$$\Gamma(t,x,u) \subset g(t)B,\quad 0 \leq g \in L^1$$

$$h(\Gamma(t,x,u), \Gamma(t,x',u)) \leq \omega(t, \|x-x'\|)$$

I) Se riesce inoltre

$$\gamma(t,x,u) \in \Gamma(t,x,u) = \text{convesso}$$

con γ t-misurabile e Γ (x,u)-u.s.c., allora si ha

i) $X \times U \ni (\xi,u) \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} \mathcal{T}_\Gamma(T;\xi,u) \neq \emptyset$ compatto connesso

ii) $X \times U \ni (\xi,u) \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{} \mathcal{A}_\Gamma(T;\xi,u),\ \mathcal{F}_\Gamma(T;\xi,u) \neq \emptyset$ compatto connesso

II) Se risulta $\Gamma(\cdot,x,u)$ misurabile, $\Gamma(t,\cdot,\cdot)$ continua e g limitata, allora si ha

i) $X \times U \ni (\xi,u) \xrightarrow[\text{l.s.c.}]{} \mathcal{T}_\Gamma(T;\xi,u) \subset \overline{\mathcal{T}_\Gamma(T;\xi,u)} = \mathcal{T}_{\overline{\langle\Gamma\rangle}}(T;\xi,u)$

(dalla coppia (ξ,u) a $\mathcal{T}_{\overline{\langle\Gamma\rangle}}(T;\xi,u)$: continua)

ii)se Γ inoltre è continua, si ha

$$X \times U \ni (\xi,u) \xrightarrow[\text{l.s.c.}]{} \mathcal{T}^{(r)}_\Gamma(T;\xi,u) \subset \overline{\mathcal{T}^{(r)}_\Gamma(T;\xi,u)} = \mathcal{T}_{\overline{\langle\Gamma\rangle}}(T;\xi,u)$$

dove $\mathcal{T}^{(r)}_\Gamma$ è il sottoinsieme di $\mathcal{T}$ costituito dalle soluzioni "regolari". In i) e ii) si può sostituire $\mathcal{T}$ con $\mathcal{A}$.

Per questi ed altri risultati dello stesso genere cfr. Tolstonogov [21] e anche [18], [15], [34], [35]. Ricordiamo che ω è una funzione di tipo Kamke.

Teorema 5. Supponiamo che la m-funzione Γ verifichi le condizioni

$$[0,T] \times R^n \xrightarrow[\text{cont}]{\Gamma} \text{comp}(R^n)$$

$$\Gamma(t,x) \subset MB, \quad 0 \leq M = \text{cost.}$$

$$h(\Gamma(t,x), \Gamma(t,y)) \leq \omega(t)\|x-y\|, \qquad 0 \leq \omega \in L^1.$$

Allora valgono le seguenti affermazioni

i) Se $y : [0,T] \to R^n$ è assolutamente continua e se

$$\rho(\dot{y}(t),\ \Gamma(t,y(t)) \leqq \lambda(t),\ \lambda \in L^1,$$

allora esiste $x \in \mathcal{T}_\Gamma(T,\xi)$, con $\xi \in R^n$ arbitrario, tale che

$$\|x(t)-y(t)\| \leqq \|\xi-y(o)\| e^{\int_0^t \omega(s)ds} + \int_0^t \lambda(s) e^{\int_0^s \omega(\sigma)d\sigma} ds \equiv \phi(t),\ 0 \leqq t \leqslant T,$$

$$\|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\| \leqq \omega(t)\ \phi(t) + \lambda(t)$$

ii) $\mathcal{T}_\Gamma(T,\cdot)$ è lipschitziana da R^n a $C([0,T],\ R^n)$, ossia

$$h(\mathcal{T}_\Gamma(T,\xi),\ \mathcal{T}_\Gamma(T,\mu)) \leqq C_T\|\xi-\mu\|,\quad C_T = \text{cost}.$$

Questo risultato è dovuto a Filippov. Per la dimostrazione cfr. Aubin--Cellina [6], Hermes [7].

Ora ci proponiamo di esporre alcuni risultati per le inclusioni differenziali con le traiettorie vincolate a variare, a volte in modo monotono rispetto a certe relazioni d'ordine parziale, su insiemi non (necessariamente) aperti.

Per questo ci occorrono due tipi di *cono tangente* a un insieme $A \neq \emptyset$ in un suo punto, introdotti da Bouligand (il cono $T(A;x)$, cfr. Aubin [27] e Haddad [28]) e da Clarke [29] (il cono $T^C(A;x)$):

$$T(A;x) = \{v \in R^n \mid \liminf_{\lambda \to 0+} \frac{\rho(x+\lambda v,A)}{\lambda} = 0\}\ ,\qquad x \in A$$

$$T^C(A;x) = \{v \in R^n \mid \limsup_{\substack{\lambda \to 0+ \\ x' \to x}} \frac{\rho(x'+\lambda v,A) - \rho(x',A)}{\lambda} \leqq 0\},\quad x \in A$$

Si dimostra che entrambi sono coni chiusi con vertice nell'ori

gine e che $T(A;x) \supset T^c(A;x)$ = convesso (cfr. Clarke [29], Clarke-Aubin [30]).

L'inclusione può essere propria, come mostra il semplice esempio

$$A = \{(x,|x|) \in R^2 | x \in R\}$$

per il quale si ha $A = T(A;0) \neq T^c(A;0) = \{0\}$.

Ricordiamo che un *preordine* sull'insieme X è una relazione $\rho \subset X \times X$ riflessiva e transitiva. Se pensiamo ρ come grafico di una m-funzione, ciò si può scrivere nella forma

$$x \in \rho(x) \subset \rho(\rho(x)), \qquad \forall x \in X.$$

Un primo risultato è il seguente

Teorema 6. Sia $X \neq \emptyset$ un sottoinsieme localmente compatto di R^n, sia $\rho : X \multimap X$ un preordine l.s.c. e con grafico chiuso e sia

$$X \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{\Gamma} \text{conv}(R^n)$$

Allora sono equivalenti le affermazioni

i) $\Gamma(x) \cap T(\rho(x);x) \neq \emptyset, \qquad \forall x \in X$,

ii) per ogni $x_0 \in X$ esistono $T > 0$ e una funzione lipschitziana $x:[0,T] \to R^n$ tale che

$$x(o) = x_0,\ x(t) \in X,\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$$
$$t < t' \Rightarrow x(t') \in \rho(x(t)).$$

Questo risultato è dovuto a Haddad [28], che ha pure trattato il caso di Γ dipendente dal tempo (in assenza di ordine ρ). Viene inoltre osservato che se X è chiuso e Γ limitata su X si può prendere la soluzione $x(\cdot)$ in ii) definita su $[0, +\infty[$.

Nel caso non convesso abbiamo il seguente risultato

Teorema 7. Sia $X \neq \emptyset$ un sottoinsieme compatto di R^n, sia $\rho : X \to \text{comp}(X)$ un preordine lipschitziano (nella metrica di Hausdorff) e sia

$$X \xrightarrow[\text{continua}]{\Gamma} \text{comp}(X)$$

se vale la condizione

$$\Gamma(x) \subset T^c(\rho(x);x), \qquad \forall x \in X ,$$

allora, per ogni $x_0 \in X$, $v_0 \in \Gamma(x_0)$ e $T > 0$, esiste una funzione "regolare" $x : [0,T] \to R^n$ tale che

$$x(o) = x_0, \ \dot{x}(o) = v_0, \ x(t) \in X, \ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$$
$$t < t' \to x(t') \in \rho(x(t)).$$

Questo risultato è dovuto a Clarke-Aubin [30]. Gli Autori danno indicazioni sull'estensione al caso di Γ dipendente anche dal tempo e al caso di X = compatto in uno *spazio di Banach* (occorre la condizione

$$\sup_{\substack{x \in X \\ v \in \Gamma(x)}} \frac{\rho((x,x+\lambda v), \rho)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0+]{} 0$$

dove ρ è identificata al proprio grafico).

Osservazione. Se Γ è lipschitziana, ossia se verifica la condizione $h(\Gamma(x), \Gamma(x')) \leq M \|x-x'\|$, e se $\rho(x) \equiv X$, la condizione "$\Gamma(x) \subset T^C(\rho(x);x)$ per ogni $x \in X$" assicura che per *ogni* soluzione $x(\cdot)$ si ha $x(t) \in X$ per $0 \leq t \leq T$ (cfr. Clarke [29]).

Per altri risultati nello stesso ordine di idee cfr. Aubin [1].

Aubin [27] ha studiato il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)),\ x(o) = x_o,\ x(t) \in X \quad \text{per } 0 \leq t \leq T, \\ V(x(t')) - V(x(t)) + \int_t^{t'} W(x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau \leq 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq t' \end{cases}$$

dove X è un sottoinsieme *chiuso* di R^n e

$$X \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{\Gamma} \text{conv}(R^n)$$

$$X \xrightarrow{V} [0, +\infty[$$

$$X \times R^n \xrightarrow[\text{l.s.c.}]{W} [0, +\infty[, \quad W(x,\cdot) \text{ convessa}$$

Sempre in [27] Aubin ha introdotto e studiato la *derivata contingente superiore* di una funzione

$$V : X \to R,$$

che possiamo così definire

$$D_+ V(x_o)(u_o) = \liminf_{\substack{\lambda \to 0+ \\ u \to u_o}} \frac{V(x_o+\lambda u) - V(x_o)}{\lambda}$$

Se x_0 è interno a X e V è localmente lipschitziana in x_0, si ha

$$D_+ V(x_0)(u_0) = \liminf_{\lambda \to 0+} \frac{V(x_0+\lambda u_0) - V(x_0)}{\lambda}$$

Tuttavia questa formula non vale per $x_0 = (0,0) \in R^2 \ni (0,1) = u_0$,

$$V(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = (0,0) \\ \dfrac{x_1\, x_2}{x_1^2 + x_2^2}\,, \; x \neq 0 \end{cases}$$

La derivata $D_+ V(x_0)$ è suscettibile della seguente interpretazione geometrica: il suo epigrafico coincide col cono tangente in $(x_0,V(x_0))$ all'epigrafico della V(cfr. [27]).

Fra i diversi risultati contenuti in [27] figurano anche quelli riassunti nel seguente

<u>Torema 8</u>. Sotto le condizioni indicate sopra, valgono le affermazioni:

i) Se per ogni $x_0 \in X$ esiste una soluzione del problema (P), con $T > 0$, allora

(L) $\quad \forall x \in X, \; \exists v \in \Gamma(x): D_+V(x)(v) + W(x,v) \leqq 0$

ii) Se V e W sono continue e verificano la condizione (L), il problema (P) ha soluzione per ogni $x_0 \in X$, con $T > 0$ (Se Γ è limitata su X si può prendere $T = +\infty$).

iii) Se $W(x,v) = \|v\|$ e $x : [0, +\infty[\to R^n$ è una soluzione del problema (P), allora esiste $x_* \in X$ tale che

$$x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_* , \quad 0 \in \Gamma(x_*), \quad V(x(t)) \downarrow V(x_*).$$

Nel caso di Γ "dipendente dal tempo" si ha il seguente

Teorema 8'. Supponiamo che la m-funzione Γ e le funzioni V e W verifichino le condizioni

$$[0, +\infty[\times R^n \supset K \xrightarrow[\text{u.s.c.}]{\Gamma} \text{conv}(R^n), \quad \Gamma \text{ limitata}$$

$$K \xrightarrow[\text{cont}]{V} [0, +\infty[$$

$$K \times R^n \xrightarrow[\text{cont}]{W} [0, +\infty[, \qquad W(t,x,\cdot) \text{ convessa}$$

con K chiuso.Allora sono equivalenti le affermazioni

i) per ogni $\xi \in R^n$ tale che $(0,\xi) \in K$, esiste una soluzione $x \in T_\Gamma([0, +\infty[, \xi)$ verificante le condizioni

$$(t,x(t)) \in K \qquad \text{per } t \geq 0,$$

$$0 \leq t \leq t' \Rightarrow V(t',x(t'))-V(t,x(t)) + \int_0^\infty W(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))\, d\tau \leq 0$$

ii) per ogni $(t,x) \in K$ esiste $v \in \Gamma(t,x)$ tale che

$$D_+V(t,x)(1,v) + W(t,x,v) \leq 0$$

Questo è un risultato di Aubin [27].

Vogliamo concludere con alcuni risultati relativi alle "inclusioni di tipo gradiente"

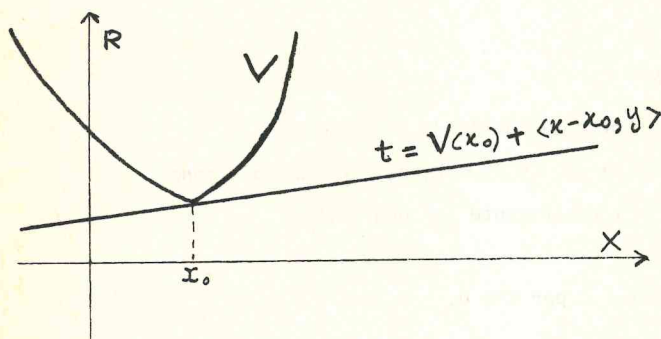
$$\dot{x}(t) \in - \partial V(x(t))$$

con V = *funzione convessa* definita su uno spazio di *Hilbert* reale X

$$X \xrightarrow{V}]-\infty, +\infty]$$

$$D(V) = \{x \in X | V(x) < +\infty\}$$

Ricordiamo la definizione di *sub-differenziale* di V in x_0:

$$\partial V(x_0) = \{y \in X | \forall x \in X : V(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle \leq V(x)\}$$

Gli elementi di $\partial V(x_0)$ si dicono sub-gradienti di V in x_0. Per esempio si ha

$$\partial \| \cdot \| (x_0) = \begin{cases} \left\{\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\} & \text{se } x_0 \neq 0 \\ \{y \in X | \|y\| \leq 1\} & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\partial|\cdot|(x_o) = \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x_o < 0 \\ [-1,1] & \text{se } x_o = 0 \\ \{1\} & \text{se } x_o > 0 \end{cases}$$

E' noto (cfr. Castaing-Valadier [9], per esempio) che se V è l.s.c. oltre che convessa, si ha

- $\partial V(x) \neq \emptyset$ convesso e chiuso per ogni $x \in D(\partial V) = \{x \in D(V) | \partial V(x) \neq \emptyset\}$ e $D(\partial V)$ è denso in $D(V)$;
- ∂V è una m-funzione monotona massimale, ossia verifica la condizione

$$y_i \in \partial V(x_i) \Rightarrow \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

e ∂V non è propriamente prolungabile in alcuna m-funzione che verifichi la stessa condizione.

Ora siamo in condizioni di enunciare il seguente

Teorema 9. Sia X uno spazio di Hilbert reale e sia

$$X \xrightarrow[\text{l.s.c.}]{V}]-\infty, +\infty] \quad \text{convessa}$$

con $D(V) \neq \emptyset$. Allora valgono le affermazioni:

i) Per ogni $x_o \in D(\partial V)$ esiste una e una sola funzione assolutamente continua $x : [0, +\infty[\to X$ tale che

$$x(o) = x_o, \quad x(t) \in D(\partial V), \quad \dot{x}(t) \in -\partial V(x(t)) \ ;$$

inoltre la funzione $t \to V(x(t))$ è decrescente, convessa e verifica la condizione

$$\frac{d^+}{dt} V(x(t)) + \| \dot{x}(t) \|^2 = 0.$$

ii) Se $x_i(\cdot)$ è la soluzione di dato iniziale $x_i \in D(\partial V)$ si ha

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leq \| x_1 - x_2 \|$$

iii) Se la funzione V è inferiormente semicompatta, ossia $\{x \in X | V(x) \leq t\}$ = compatto per ogni $t \in R$, allora la soluzione $x(\cdot)$ considerata in i) converge a un *minimo* x_* di V che è anche punto sta_ zionario di ∂V:

$$\| x(t) - x_* \| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \qquad 0 \in \partial V(x_*)$$

Per la dimostrazione cfr. Aubin-Cellina [6], Brezis [31]. Su questo tipo di inclusioni e su quello più generale in cui ∂V è sostitui- to da un operatore monotono massimale, anche nel caso dipendente dal tem_ po, esiste una vasta letteratura. Per questo cfr. Brezis [31], Da Pra- to [32], Attouch-Damlamian [33].

BIBLIOGRAFIA

1) AUBIN J.P.: Monotone evolution of resource allocations. Journal of Math. Econ. 6 (1979), 43-62.

2) FILIPPOV A.F.: On certain questions in the theory of optimal control. SIAM J.-A, Control 1 (1962), 76-84.

3) ROCKAFELLAR R.T.: Dual problems of lagrange for arcs of ounded variation. Calculus of Variations and Control Theory (Edit. Russell), Academic Press, 1976, 155-192.

4) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle inclusioni differenziali negli spazi di Banach e selezioni continue. ΔAH CCCP, 244, 5 (1979).

5) DIEUDONNE J.: Foundations of modern analysis. Academic Press, 1960.

6) AUBIN J.P.-CELLINA A.: Differential Inclusions (in corso di stampa).

7) SMITHSON R.E.: Multifunctions. Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XX, (1972), 31-53.

8) BOURBAKI N.: elements de Mathematique Topologie generale, Chap. 1 Hermann.

9) CASTAING C.-VALADIER M.: Convex analysis and measurable multifunctions. LNM n. 580 (1977).

10) LASRY J.M.-ROBERT R.: Analyse non lineaire muntivoque. Cahiers de Mathematiques de la Decision n. 7611, Universite de Paris IX Dauphine.

11) MICHAEL E.: Continuous Selections, I. Ann. of Math. 63 (1956), 361-62.

12) HADDAD J.: Topological properties of the set of solutions for functional differential inclusions. Nonlinear Anal. T.M.A. 5, 12 (1981), 1349-66.

13) WAGNER D.H.: Survey of measurable selection theorems. SIAM J. Control.

Opt. 15 (1977), 859-903.

14) WAGNER D.H.: Survey of measurable selection theorems: an update. LNM n. 794 (1980).

15) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. Esistenza delle soluzioni. Sib. M. J. 22, 4 (1981), 182-198.

16) AUMANN R.J.: Integrals of set-valued functions. J. Math. An. Appl. 12 (1965), 1-12.

17) HERMES H.: The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$. Advances in Math. 4 (1970), 149-69.

18) TOLSTONOGOV A.A.: Sulla densità ed estremalità degli insiemi di soluzioni di un'inclusione differenziale negli spazi di Banach. ΔAH CCCP 261, 2 (1981), 293-96.

19) DAVY J.L.: Properties of the solution set of a generalized differential equation. Bull. Austral. Math. Soc. 6 (1972), 379-98.

20) FILIPPOV A.F.: Sulle condizioni di esistenza delle soluzioni per le equazioni differenziali multivoche. Diff. Urav. 13, 6 (1977), 1070-78.

21) TOLSTONOGOV A.A.: Sulle proprietà delle soluzioni delle inclusioni differenziali in uno spazio di Banach. ΔAH CCCP 248, 1 (1979).

22) TOLSTONOGOV A.A.: Teoremi di confronto per inclusioni differenziali in uno spazio localmente convesso. I. Esistenza delle soluzioni. Diff. Urav. 17, 4 (1981), 651-59/II. Proprietà delle soluzioni. Ibidem 17, 6 (1981), 1016-24.

23) LOJASIEWICZ jr. S.: The Existence of Solutions for Lower Semicontinuous Orientor Fields. Bull. Acad. Polon. des Sciences. Ser. sci. math. 28, 9-10 (1980), 483-87.

24) KACZYNSKI H.-OLECH C.: Existence of solutions of orientor fields with non-couvex right-hand side. Ann. Pol. Math. 29 (1974), 61-66.

25) OLECH C.: Existence of solutions of non couvex orientor fields. Boll. UMI (4), 11, 3 Suppl. (1975), 189-97.

26) PIANIGIANI G.: On the fundamental theory of multivalued differential equations. Journ. Diff. Equat. 25 (1977), 30-38.

27) AUBIN J.P.: Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. Mathematical Analysis and Applications. Part A. Advances in Math. Suppl. Studies, vol. 7A (L. Nachbin Edit.). Acad. Press (1981), 159-229.

28) HADDAD G.: Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory. Israel. J. Math. 39, 1-2 (1981), 83-100.

29) CLARKE F.H.: Generalized gradients and applications. Trans. A.M.S. 205 (1975), 247-262.

30) CLARKE F.H.-AUBIN J.P.: Monotone invariant solutions to differential inclusions. Jour. London M.S. (2), 16 (1977), 357-66.

31) BREZIS H.: Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espace de Hilbert. LNM, North-Holland, 1973.

32) DA PRATO G.: Applications croissantes et equations d'evolutions dans les espaces de Banach. Academic Press, 1976.

33) ATTOUCH H.-DAMLAMIAN A.: Problemes d'evolution dans les Hilberts et applications. J. Math. Pures Appl. 54 (1975), 53-74.

34) TOLSTONOGOV A.A.: Sui teoremi di confronto per le inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. I. Esistenza delle soluzioni. in: Funzioni vettoriali di Liapunov e loro costruzione. Novosibirsk, NAUKA, 1980, 6-34.

35) TOLSTONOGOV A.A.: Sui teoremi di confronto per le inclusioni differenziali negli spazi di Banach con secondo membro non convesso. II. Soluzioni globali. in: Metodo diretto nella teoria della stabilità e sue applicazioni. Novosibirsk; NAUKA, 1981, 18-34.

36) ANTOSIEWICZ H.A.-CELLINA A.: Continuous selections and differential relations. Journ. of Diff. Eq. 19 (1975), 386-98.